0.1 Derived category is Triangulated

abelian category の $\mathcal{A}$ に対して、$K(\mathcal{A})$, $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ が triangulated category であることを示すのだが、morphism は元を取って図式を chaice したほうが非常に分かりやすいので証明もそうしてある。つまり R-module で考えると容易である。small Abelian category なら完全埋め込み定理で同様の議論ができるが、一般の Abelian category でも元を取らずに、同じ議論ができるはずである。面倒だとは思うが。

Definition 0.1.1

$\mathcal{A}$ を abelian category とし、$K(\mathcal{A})$ において transformation fanctor

$$[1] : K(\mathcal{A}) \longrightarrow K(\mathcal{A})$$

を次のように定義する。$A^* \in K(\mathcal{A})$ において、

$$A[1]^* = \{\ A[1]^n\ ,\ \partial^n[1]\ \} = \{A^{n+1}, -\partial^{n+1}\}$$

と１次だけ Shift させた形で定義する。また $f : A \longrightarrow B$ に対し、$f[1] : A[1] \longrightarrow B[1]$ は $f[1]^n = f^{n+1}$ とする。さらに、$f : A \longrightarrow B$ に対し、

$$C(f) = A[1] \oplus B$$

により定義する。すなわち $C(f)^n = A^{n+1} \oplus B^n$ であり、boundary は

$$\partial^n_{C(f)}(a, b) = (-\partial^{n+1}_A(a), f^{n+1}(a) + \partial^n(b))$$

である。このとき inclusion と projection である

$$j : B \longrightarrow C(f)\ ,\ p : C(f) \longrightarrow A[1]$$

が $b \mapsto (0, b)$, $(a, b) \mapsto a$ で定義されるが、これらは chain map となる。よって、d.t をある $f : A \longrightarrow B$ が存在し、

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{j} C(f) \xrightarrow{p} A[1]$$

と同型な triangle と定義する。

Theorem 0.1.2

$\mathcal{A}$ を abelian category としたとき、Def 0.0.1 の構成で $K(\mathcal{A})$ は triangulated category である。

proof)　(1) は d.t の定義の仕方から triangle の同型が同値関係なので成り立つ。

(2) は任意の $A \in K(\mathcal{A})$ に対し、$0 \longrightarrow A \xrightarrow{=} A \longrightarrow 0[1] = 0$ を考えると、$C(0) = 0[1] \oplus A = A$ であるので、結局 $0 \longrightarrow A \xrightarrow{=} A \longrightarrow 0[1] = 0$ は $0 \longrightarrow A \xrightarrow{j} C(0) \xrightarrow{p} 0[1] = 0$ と等しくなる。

(3) は $f : A \longrightarrow B$ に対し、

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{j} C(f) \xrightarrow{p} A[1]$$

がそのまま対応する。

(4) は

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"'] & B \arrow[r] \arrow[d, "\beta"'] & C(f) \arrow[r] & A[1] \arrow[d, "\alpha[1]"] \\
A' \arrow[r, "g"] & B' \arrow[r] & C(g) \arrow[r] & A'[1]
\end{tikzcd}$$

の可換図式で $C(f) \longrightarrow C(g)$ を考えればよい。ところで、$C(f) = A[1] \oplus B$, $C(g) = A'[1] \oplus B'$ であるので、

$$\gamma = \alpha[1] \oplus \beta : C(f) \longrightarrow C(g)$$

で定義すれば、

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"'] & B \arrow[r] \arrow[d, "\beta"'] & C(f) \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"'] & A[1] \arrow[d, "\alpha[1]"] \\
A' \arrow[r, "g"] & B' \arrow[r] & C(g) \arrow[r] & A'[1]
\end{tikzcd}$$

は可換になるので良い。

さて、ここからが少し大変。(5) を示そう。$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{j} C(f) \xrightarrow{p} A[1]$ に対し、$B \xrightarrow{j} C(f) \xrightarrow{p} A[1] \xrightarrow{-f[1]} B[1]$ が d.t であればよい。

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[r, "j"] \arrow[d, "="'] & C(f) \arrow[r, "p"] \arrow[d, "="'] & A[1] \arrow[r, "-f[1]"] & B[1] \arrow[d, "="] \\
B \arrow[r, "j"] & C(f) \arrow[r, "i"] & C(j) \arrow[r, "q"] & B[1]
\end{tikzcd}$$

の図式を考える。

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[r, "j"] \arrow[d, "="'] & A[1] \oplus B \arrow[r, "p"] \arrow[d, "="'] & A[1] \arrow[r, "-f[1]"] & B[1] \arrow[d, "="] \\
B \arrow[r, "j"] & A[1] \oplus B \arrow[r, "i"] & B[1] \oplus (A[1] \oplus B) \arrow[r, "q"] & B[1]
\end{tikzcd}$$

であるので、$h : C(f) \longrightarrow C(j)$ は、$h(a) = (-f[1](a), a, 0)$ で定義する。問題は、

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[r, "j"] \arrow[d, "="'] & A[1] \oplus B \arrow[r, "p"] \arrow[d, "="'] & A[1] \arrow[r, "-f[1]"] \arrow[d, "h"'] & B[1] \arrow[d, "="] \\
B \arrow[r, "j"] & A[1] \oplus B \arrow[r, "i"] & B[1] \oplus (A[1] \oplus B) \arrow[r, "q"] & B[1]
\end{tikzcd}$$

が可換であるかどうかだが、注意としては $K(\mathcal{A})$ における可換であるので $\mathrm{Co}(\mathcal{A})$ においては chain homotopy 可換が言えればよい。右側は $\mathrm{Co}(\mathcal{A})$ において本当に可換である。問題は真ん中である。

$$H : A[1] \oplus B \longrightarrow B \oplus A \oplus B[-1]$$

を $H(a, b) = (b, 0, 0)$ で定義すれば、

$$\begin{aligned}
H \circ \partial(a, b) + \partial \circ H(a, b) &= H(-\partial(a), f(a) + \partial(b)) + \partial(b, 0, 0) \\
&= (f(a) + \partial(b), 0, 0) + (-\partial(b), j(b) + \partial(0, 0)) \\
&= (f(a) + \partial(b), 0, 0) + (-\partial(b), 0, b) \\
&= (f(a), 0, b) \\
&= (0, a, b) - (-f(a), a, 0) \\
&= i(a, b) - h \circ p(a, b)
\end{aligned}$$

となるため、$i \simeq h \circ p$ であり、真ん中の四角も chain homotopy 可換である。

最後に (6) である。3 つの d.t を用意するが、それは

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{j} C(f) \longrightarrow A[1]$$

$$B \xrightarrow{g} C \longrightarrow C(g) \xrightarrow{p} B[1]$$

$$A \xrightarrow{g \circ f} C \longrightarrow C(g \circ f) \longrightarrow A[1]$$

と考えてよい。このとき、

$$u : C(f) = A[1] \oplus B \longrightarrow C(g \circ f) = A[1] \oplus C$$

を $u(a, b) = (a, g(b))$ により定義すればこれは chain map であり、さらに、

$$v : C(g \circ f) = A[1] \oplus C \longrightarrow C(g) = B[1] \oplus C$$

は、$v(a, c) = (f(a), c)$ で定義すれば、これも chain map である。さらに、

$$w : C(g) \xrightarrow{p} B[1] \xrightarrow{j[1]} C(f)[1]$$

により定義すれば、例の六角形の diagram は triangle を除いてすべて可換となる。あと残る問題は、

$$C(f) \xrightarrow{u} C(g \circ f) \xrightarrow{v} C(g) \xrightarrow{w} C(f)[1]$$

が distinglish なのかということであるが、

$$\begin{tikzcd}
C(f) \arrow[r, "u"] \arrow[d, "="'] & C(g \circ f) \arrow[r, "v"] \arrow[d, "="'] & C(g) \arrow[r, "w"] & C(f)[1] \arrow[d, "="] \\
C(f) \arrow[r, "u"] & C(g \circ f) \arrow[r, "j"] & C(u) \arrow[r, "p"] & C(f)[1]
\end{tikzcd}$$

書き返れば、

$$\begin{tikzcd}
A[1] \oplus B \arrow[r, "u"] \arrow[d, "="'] & A[1] \oplus C \arrow[r, "v"] \arrow[d, "="'] & B[1] \oplus C \arrow[r, "w"] & A[2] \oplus B[1] \arrow[d, "="] \\
A[1] \oplus B \arrow[r, "u"] & A[1] \oplus C \arrow[r, "j"] & A[2] \oplus B[1] \oplus A[1] \oplus C \arrow[r, "p"] & A[2] \oplus B[1]
\end{tikzcd}$$

であり、chain map

$$\varphi : C(g) = B[1] \oplus C \longrightarrow C(u) = A[2] \oplus B[1] \oplus A[1] \oplus C$$

を、$\varphi(b,c) = (0,b,0,c)$ で定義する。先の (5) の議論と同様に、φ は上の図式を chain homotopy 可換とする。あとはさらにこれが chain homotopy equivalence を示せばよい。そのために、

$$\chi : C(u) = A[2] \oplus B[1] \oplus A[1] \oplus C \longrightarrow C(g) = B[1] \oplus C$$

を $\chi(a,b,a',c) = (f(a')+b,c)$ で定義すれば、明らかに $\chi \circ \varphi = 1$ であるが、

$$\varphi \circ \chi(a,b,a',c) = \varphi(f(a')+b,c) = (0,f(a')+n,0,c)$$

である。ここで、

$$H : A[2] \oplus B[1] \oplus A[1] \oplus C \longrightarrow A[1] \oplus B \oplus A \oplus C[-1]$$

を、$H(a,b,a',c) = (a',0,0,0)$ で定義すれば、これにより、$\chi \circ \varphi \overset{H}{\simeq} 1$ となり φ は chain homotopy equivalence である。

$\square$

Definition 0.1.3

$\mathcal{A}$ を abelian category とし、$\mathcal{D}(A)$ を考える。$f/s, g/t \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}(\mathcal{A})}(A,B)$ に対し、$A \xrightarrow{f} C \xleftarrow{s} B$ と、$A \xrightarrow{g} D \xleftarrow{t} B$ としておくとき、$C \xleftarrow{s} B \xrightarrow{t} D$ の push out をとり、

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{t} & D \\ {\scriptstyle s}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle s'} \\ C & \xrightarrow{t'} & E \end{array}$$

と考えると、

$$f/s + g/t = t' \circ f + s' \circ g / t' \circ s$$

で定義すれば、$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}(\mathcal{A})}(A,B)$ はアーベル群となり、$\mathcal{D}(\mathcal{A})$ は additive category である。

このとき、Transformation fanctor である $[1] : \mathcal{D}(A) \longrightarrow \mathcal{D}(\mathcal{A})$ が $K(\mathcal{A})$ と同じく定義できる。よって、$\mathcal{D}(\mathcal{A})$, [1] における d.t は、$f/s \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}(\mathcal{A})}(A,B)$ に対し、$A \xrightarrow{f} C \xleftarrow{s} B$ として $K(\mathcal{A})$ における d.t

$$A \xrightarrow{f} C \xrightarrow{j} C(f) \xrightarrow{p} A[1]$$

に対し、これを $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ 内で考え、

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f/1"] \arrow[d, "="'] & C \arrow[r, "j/1"] \arrow[d, "1/s"'] & C(f) \arrow[r, "p/1"] \arrow[d, "="'] & A[1] \arrow[d, "="'] \\
A \arrow[r, "f/s"] & B \arrow[r, "j\circ s/1"] & C(f) \arrow[r, "p/1"] & A
\end{tikzcd}$$

の下列が $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ での d.t である。

Theorem 0.1.4

$\mathcal{A}$ を abelian category とするとき、$\mathcal{D}(A)$ は Def 0.0.3 の構成により triangulated category となる。

proof)　　$K(\mathcal{A})$ の証明を習えばよい。

□